

基于力平衡的安全系数统一求解格式

林 丽¹, 杨明成², 郑颖人³

(1. 成都医学院 基建工程处, 成都 610083; 2. 宁夏大学 土木与水利工程学院, 银川 750021; 3. 后勤工程学院 军事土木系, 重庆 400041)

摘 要: 基于力平衡求解安全系数的极限平衡条分法在边坡稳定分析和设计中得到了广泛地应用。然而, 由于条间力假设的不同, 各种方法的计算格式也不同, 既不利于程序的编写, 也不便于人们理解各自方法的优缺点。首次将现有基于力平衡求解安全系数的极限平衡条分法对条间力的假定表示成统一形式, 根据力的平衡, 导出了简单明了的条间力递推方程。根据条间力递推方程, 建立了传统意义下基于力平衡的安全系数统一求解格式, 使计算原理更为清晰, 计算过程更为简单。在此基础上, 如果将严格 Janbu 法所满足的条块力矩平衡方程表示成条间力的假定, 严格 Janbu 法也可采用基于力平衡的安全系数统一求解格式。

关 键 词: 边坡稳定; 力平衡; 条间力递推方程; 安全系数; 统一求解格式

中图分类号: TU 457 **文献标识码:** A

Unified solving formulation for safety factor based on force equilibrium

LIN Li¹, YANG Ming-cheng², ZHEN Ying-ren³

(1. The Construction Department, Chengdu Medical College, Chengdu 610083, China; 2. School of Civil and Hydraulic Engineering, Ningxia University, Yinchuan 750021, China; 3. Department of Civil Engineering, Logistical Engineering University, Chongqing 400041, China)

Abstract: The limit equilibrium methods of slices, the safety factors are computed from force equilibrium, have been widely used for analyzing and designing slope stability. However, because the assumptions regarding the inter-slice forces are different, the solving formulations of every method are different. It does not facilitate the compiling of the program and the understanding among the advantages and disadvantages of different procedures. In this paper, the assumptions for the inter-slice forces made by the existing limit equilibrium methods of slices that the safety factors are computed from force equilibrium are expressed into the unified formulation for the first time; the simple and clear recurrence equation of the inter-slice forces is derived based on force equilibrium. The unified solving formulation for the safety factors based on force equilibrium in the context of conventional methods of slices is developed based on the recurrence equation of the inter-slice forces. It makes the calculating principle to be clearer and the calculating process to be simpler. On this basis, if inter-slice moment equilibrium equation that rigorous Janbu method satisfies is expressed into the assumption regarding the inter-slice forces, rigorous Janbu method can also adopt the unified solving formulation for the safety factor based on force equilibrium.

Key words: slope stability; force equilibrium; recurrence equation of the inter-slice forces; safety factor; unified solving formulation

1 前 言

极限平衡条分法是目前最常用的边坡稳定性分析经典方法。该法是通过条间力的假定, 并基于一定的平衡条件进行安全系数的计算, 其中基于力平衡求解安全系数的极限平衡条分法在边坡稳定分析和设计中得到了广泛应用。然而, 由于条间力假设的不同, 各种方法的计算格式也不同, 既不利于程

序的编写, 也不便于人们理解各自方法的优缺点。

很多学者致力于研究边坡稳定安全系数求解格式的统, 但他们有的只是在形式上取得统一, 没有触及物理本质^[1~3], 有的虽然导出了基于力平衡的安全系数统一表达式, 但由于增加了新的未知量, 致使方法失去了传统意义^[4]。本文将现有基于力平衡求解安全系数的极限平衡条分法, 对统一一条间力的假定形式, 根据力的平衡建立条间力递推方

程²⁸⁰再根据条间力递推方程, 建立传统意义下(保持原有方法所满足的平衡条件、对条间力的假定和未知量不变)基于力平衡的安全系数统一求解格式。在此基础上, 将严格 Janbu 法所满足的条块力矩平衡方程表示成条间力的假定, 严格 Janbu 法也可采用基于力平衡的安全系数统一求解格式。最后通过算例验证所给统一求解格式的合理性和有效性。

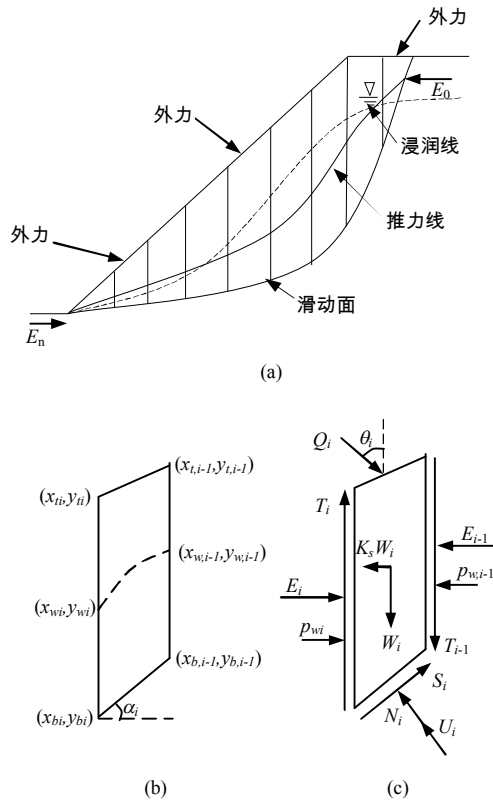


图 1 边坡体的条分及条块体的几何尺寸和受力分析

Fig. 1 Slices of a sliding mass, the geometric dimensions of a slice and the forces acting on a slice

2 基本方程

考虑图 1(a) 示的可能滑动体。将材料的有效抗剪强度指标 c' 和 $\tan \varphi'$ 分别除以 F_s 后, 可能滑动体处于极限平衡状态。将该可能滑动体划分成 n 个垂直条块, 条块 i 的几何形状由角点坐标 (x_{ti}, y_{ti}) , (x_{bi}, y_{bi}) , $(x_{t,i-1}, y_{t,i-1})$ 和 $(x_{b,i-1}, y_{b,i-1})$ 描述。浸润线位置由其与条块各边的交点坐标 (x_{wi}, y_{wi}) 和 $(x_{w,i-1}, y_{w,i-1})$ 表示, 如图 1(b) 所示。

对于条块 i , 如图 1(c) 所示, 考虑垂直方向力的平衡, 得

$$N_i \cos \alpha_i + S_i \sin \alpha_i + T_i - T_{i-1} - W_i - Q_i \cos \theta_i = 0 \quad (1)$$

类似地, 考虑水平方向的力平衡, 得:

$$S_i \cos \alpha_i - N_i \sin \alpha_i + E_i - E_{i-1} - K_s W_i + Q_i \sin \theta_i = 0 \quad (2)$$

式中 N_i 为条底法向力; S_i 为条底剪力; E_i 为条块界面上的法向力; T_i 为条间剪力; W_i 为条块的重力; K_s 为地震影响系数; Q_i 为坡面外力, 该力源于外载或加固作用, 与垂直方向夹角为 θ_i , 当该力沿平行于条底的分力方向与可能滑动体的可能滑动方向相反时, $\theta_i > 0$ (如图 1(c) 所示); 反之, $\theta_i < 0$; α_i 为条底相对于水平方向的倾角。

对于处于极限平衡状态的可能滑动体, 根据 Mohr-Coulomb 破坏准则, 滑动面上的剪力方程为

$$S_i = [c'_i l_i + (N_i - U_i) \tan \varphi'_i] / F_s \quad (3)$$

3 条间力递推方程

对于分成 n 个条块的可能滑动体, 如果仅考虑力的平衡, 根据式(1)~(3) 最多可以建立 $3n$ 个独立的方程, 而需要待求的未知量总数为 $(4n-1)$ 如表 1 所列。这样, 对于 n 大于 1, 该条块系是不静定的。

表 1 基于力平衡的极限平衡条分法中的未知量
Table 1 Unknowns in limit equilibrium methods of slices based on force equilibrium

数目	说明
1	安全系数 F_s
n	条底的法向力 N_i
n	条底剪力 S_i
$n-1$	条间力 P_i 沿垂直于条块界面的分量 E_i
$n-1$	条间力 P_i 沿平行于条块界面的分量 T_i
$4n-1$	未知量的总数

为了使问题静定可解, 基于力平衡的常用极限平衡条分法一般均对条间力作了假定。为了便于建立条间力递推方程, 将基于力平衡的常用极限平衡条分法对条间力的假定统一表示成如下的形式。

$$T_i = A_i E_i + X_i \quad (4)$$

其中 A_i , X_i 的取值随假定的不同而不同, 见表 2。

对于严格 Janbu 法, 考虑作用在条块 i 上的力对条底中点的力矩平衡, 有

$$\begin{aligned} E_i [f_i(x_i) - y_{ni}] - E_{i-1} [f_i(x_{i-1}) - y_{ni}] \pm T_i (x_{ni} - x_{bi}) \pm \\ T_{i-1} (x_{b,i-1} - x_{ni}) - Q_i \sin \theta_i (y_{qi} - y_{ni}) \pm K_s W_i (y_{ci} - y_{ni}) \pm \\ W_i (x_{ci} - x_{ni}) + Q_i \cos \theta_i (x_{qi} - x_{ni}) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

其中滑体的可能滑动方向自右上向左下 (图 1(a))

时,在出现 2 个计算符号处,取上面一个计算符号;滑体的可能滑动方向自左上向右下时,在出现 2 个计算符号处,取下面一个计算符号。重新整理后得

$$T_i = \pm \frac{y_{ni} - f_t(x_i)}{x_{ni} - x_{bi}} E_i \pm \frac{1}{x_{ni} - x_{bi}} \{E_{i-1} [f_t(x_{i-1}) - y_{ni}] \mu \cdot T_{i-1} (x_{b,i-1} - x_{ni}) + K_s W_i (y_{ci} - y_{ni}) \mp W_i (x_{ci} - x_{ni}) - Q_i \sin \theta_i (y_{qi} - y_{ni}) \mu Q_i \cos \theta_i (x_{qi} - x_{ni})\} \quad (6)$$

对于严格 Janbu 法,有

$$A_i = \pm \frac{y_{ni} - f_t(x_i)}{x_{ni} - x_{bi}} \quad (7)$$

$$X_i = \pm \frac{1}{x_{ni} - x_{bi}} \{E_{i-1} [f_t(x_{i-1}) - y_{ni}] \mp T_{i-1} (x_{b,i-1} - x_{ni}) + K_s W_i (y_{ci} - y_{ni}) \mp W_i (x_{ci} - x_{ni}) - Q_i \sin \theta_i (y_{qi} - y_{ni}) \mu \cdot Q_i \cos \theta_i (x_{qi} - x_{ni})\} \quad (8)$$

这里, $f_t(x_i)$ 为推力线函数,是一个预先给定的函数。利用二次拉格朗日插值函数给出一条光滑的推力线为

$$f_t(x) = f_t(x_a) \frac{(x - x_m)(x - x_b)}{(x_a - x_m)(x_a - x_b)} + f_t(x_b) \frac{(x - x_a)(x - x_m)}{(x_b - x_a)(x_b - x_m)} + f_t(x_m) \frac{(x - x_a)(x - x_b)}{(x_m - x_a)(x_m - x_b)} \quad (9)$$

式中 x_a, x_b 分别为滑体 2 个端点的横坐标; $x_m = (x_a + x_b) / 2$ 。对于粘性土, $f_t(x_m)$ 可以取 x_m 处滑体高度的二分点处的纵坐标;对于无粘性土, $f_t(x_m)$ 可以取 x_m 处滑体高度的三分点处的纵坐标。

表 2 基于力平衡的极限平衡条分法中 A_i, X_i 的取值

Table 2 Values of A_i and X_i in limit equilibrium methods of slices based on force equilibrium

计算方法	A_i	X_i
简化 Janbu 法	0	0
陆军工程师团法	$\tan \Omega_a$	0
罗厄法	$(\tan \alpha_i + \tan \Omega_i) / 2$	0
不平衡推力法	$\tan \alpha_i$	0
Sarma 法	$\tan \phi'_{avmi}$	$c'_{avmi} h_i - p_{wi} \tan \phi'_{avmi}$

注: Ω_{av} 为边坡的平均坡度,是一个常数; Ω_i 为条块顶面的倾角; $c'_{avmi} = c'_{avi} / F_s$; $\tan \phi'_{avmi} = \tan \phi'_{avi} / F_s$; $c'_{avi}, \tan \phi'_{avi}$ 为条块界面上的加权平均抗剪强度指标。

将式 (3) 和式 (4) 代入式 (1) 和式 (2), 并在得到的 2 个方程中消去 N_i , 得

$$E_i = \frac{C_i}{B_i} E_{i-1} + \frac{D_i}{B_i} \quad 28(10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} B_i &= A_i \sin(\alpha_i - \phi'_{mi}) + \cos(\alpha_i - \phi'_{mi}); \\ C_i &= A_{i-1} \sin(\alpha_i - \phi'_{mi}) + \cos(\alpha_i - \phi'_{mi}); \\ D_i &= W_i \sin(\alpha_i - \phi'_{mi}) + K_s W_i \cos(\alpha_i - \phi'_{mi}) - \\ &\quad c'_{mi} l_i \cos \phi'_{mi} + X_{i-1} \sin(\alpha_i - \phi'_{mi}) + U_i \sin \phi'_{mi} - \\ &\quad X_i \sin(\alpha_i - \phi'_{mi}) + Q_i \sin(\alpha_i - \phi'_{mi} - \theta_i) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式 (10) 是一个条间力的递推方程。 E_0 为初始条间推力, 只有滑体入口端有张裂缝且充水时才存在; E_n 为出口处保持最后条块平衡所需的水平推力, 一般定义为不平衡推力或剩余推力。

4 基于力平衡的安全系数统一求解格式

基于力平衡求解安全系数 F_s 的统一格式为, 首先假定一个初始试算安全系数 $F_s^{(0)}$, 可以取瑞典法求得的安全系数 F_s , 也可以直接取为 1; 根据条间力递推式 (10), 从滑动面的入口开始, 一个条块一个条块地进行到滑动面的出口。对于特定的 F_s 试算值, 将会有相应的边界力 E_n 使边坡保持稳定。如果求得的 E_n 大于给定的边界力, F_s 下一次的试算值应该小于前一次的假定值。反之, 如果求得的 E_n 小于给定的边界力, 下一次的 F_s 试算值就应该大于前一次的试算值。求解方法就是这样一个逐次逼近的过程, 最后得到的 E_n 值等于或接近给定的边界力。在大多数情况下, 这个给定的边界力将是大小为零的力。当然在每步改进安全系数方面, 可以采用一定的算法技巧, 加速收敛。大量计算实践表明, 只要滑面形状不反常, 基于条间力递推式 (10) 求解安全系数 F_s 的统一格式均能稳定收敛。

5 算例分析

算例 1. 图 2 为一由两种不同的土质所构成的边坡, 每种土的材料参数见表 3。在考虑渗流作用的情况下, 对一圆弧滑动面, 分别用上述基于力平衡的常用极限平衡条分法采用本文所给统一求解格式进行安全系数的计算, 其计算结果见表 4。为了便于比较, 表 4 中还给出了瑞典法和简化 Bishop 法的计算结果。

由表 4 可知, 对于本例圆弧滑动面, 非严格条

分法的安全系数之间的差别比较大。但它们与严格 Janbu 法的安全系数之间相差最大不超过 15 %。

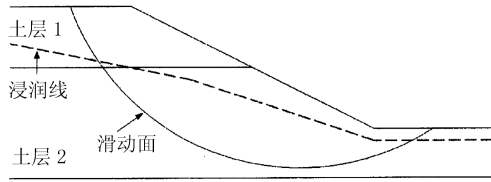


图 2 算例边坡 1
Fig. 2 Example slope 1

表 3 算例边坡 1 中土的材料参数

土层	重度 γ /kN.m ⁻³	粘聚力 c /kPa	内摩擦角 φ /(°)
①	15.0	5.0	20.0
②	18.0	10.0	25.0

表 4 算例边坡 1 的稳定安全系数

计算方法	F_s	计算方法	F_s
瑞典法	1.280 3	罗厄法	1.566 3
简化 Bishop 法	1.496 9	不平衡推力法	1.486 6
简化 Janbu 法	1.317 4	Sarma 法 (1)	1.585 4
陆军工程师团法	1.747 3	严格 Janbu 法	1.498 0

算例 2. 图 3 为一含有软弱夹层的边坡，上下土层及软弱夹层的材料参数见表 5。对如图 3 所示的任意形状滑动面，分别用上述基于力平衡的常用极限平衡条分法，采用本文所给统一求解格式进行安全系数的计算，其计算结果见表 6。

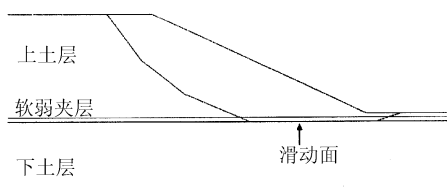


图 3 算例边坡 2
Fig.3 Example slope 2

表 5 算例边坡 2 中土的材料参数

土层	重度 γ /kN.m ⁻³	粘聚力 c /kPa	内摩擦角 φ /(°)
上土层	18.84	28.45	20.0
软弱夹层	18.84	0.0	10.0
下土层	18.84	28.45	20.0

由表 6 可知，对于本例任意形状滑动面，基于力平衡的常用极限平衡条分法的安全系数之间的差别仍然比较大。而严格 Janbu 法不收敛，这是由于

在软弱夹层处，条块的宽度很小，从而使得由式(6)算出的条间剪力绝对值很大的缘故。

表 6 算例边坡 2 的稳定安全系数

计算方法	F_s	计算方法	F_s
简化 Janbu 法	1.336 7	不平衡推力法	1.411 5
陆军工程师团法	1.434 6	Sarma 法 I	1.539 7
罗厄法	1.407 9	严格 Janbu 法	不收敛

6 结 语

现有基于力平衡的极限平衡条分法由于对条间力的假定不同，产生了形式多样的计算格式。可将这些假定表示成统一形式，建立简单明了的条间力递推方程。根据条间力递推方程，可以有效地建立传统意义下基于力平衡的安全系数统一求解格式。应用统一求解格式可很方便地同时计算多种基于力平衡的极限平衡条分法的安全系数，计算过程简单明了，不但便于程序的编写，同时也有利于不同方法优缺点的比较和理解，便于被一般技术人员理解和掌握。严格 Janbu 法性质上虽然属于严格法，但可以将该法所满足的条块力矩平衡方程表示成条间力的假定，采用基于力平衡的安全系数统一求解格式。

算例结果表明，无论是圆弧滑动面还是任意形状滑动面，基于力平衡的常用极限平衡条分法的安全系数之间的差别均比较大。因此，对同一边坡特别是土石坝问题，应采用多种方法同时计算，比较结果，根据经验判断其合理性。同时也验证了所给安全系数统一求解格式是正确有效的。

参 考 文 献

- [1] Fredlund D G, Krahn J. Comparison of slope stability methods of analysis[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1977, 14: 429 - 439.
- [2] Espinoza R D, Bourdeau P L, Muhunthan B. General framework for stability of slopes[J]. *Geotechnique*, 1992, 42(4): 603 - 615.
- [3] Espinoza R D, Bourdeau P L, Muhunthan B. Unified formulation for analysis of slopes with general slip surface[J]. *Journal of Geotechnical Engineering, American Society of Civil Engineering*, 1994, 120(7): 1 185 - 1 204.

- [4] 朱大勇. 极限平衡法的显示解与统一格式[博士后研究工作报告 R]. 南京: 河海大学, 2002.